Integralrechnung

1. Aufgabe:

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie

a) mit Hilfe der Substitutionsregel

b) mit Hilfe partieller Integration

die Identität

$$2 \cdot \int_a^b f(x) \cdot f'(x) dx = f^2(b) - f^2(a), \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

2. Aufgabe:

Untersuchen Sie, ob die folgenden Integrale existieren, und berechnen Sie im Falle der Existenz ihren Wert:

a) $\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x} dx$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) $\int_{-1}^1 ln|x| dx$

c) $\int_0^{1/\pi} -\frac{\sin(1/x)}{x^2} dx$

d) $\int_0^1 (\lim_{n\to\infty} n \cdot x \cdot e^{-nx^2}) dx$

Was passiert, wenn man Integral und Grenzwert bei 2d) vertauscht?

3. Aufgabe:

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Wenn man den Hauptsatz der Integralrechnung und dann den Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf das Integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

anwendet, dann ist es äquivalent zu welchem der folgenden Terme?

- ☐ $f(c)$ an einer Zwischenstelle $c \in [a, b]$
- ☐ $f'(c)$ an einer Zwischenstelle $c \in [a, b]$
- ☐ $(b - a) f(c)$ an einer Zwischenstelle $c \in [a, b]$
- ☐ $(b - a) f'(c)$ an einer Zwischenstelle $c \in [a, b]$
- ☐ Keine der obigen Antworten ist richtig.

Potenzreihen

1. Aufgabe:

Berechnen Sie den Konvergenzradius R der folgenden Potenzreihen. Untersuchen Sie zusätzlich die Konvergenz in den Randpunkten $x = -R$ und $x = R$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{3k} x^k \qquad\qquad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{3^{k-1}}{2^{k+2}} x^k$$

2. Aufgabe:

Stellen Sie das Integral

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx$$

als unendliche Reihe dar, indem Sie den Integranden als Potenzreihe schreiben und diese gliedweise integrieren. Begründen Sie, warum die gliedweise Integration möglich ist!

3. Aufgabe:

Wie sieht die Taylorreihe von $f'(x)$ in $x_0 = 0$ aus, wenn

$$f(x) = \int_0^x ln(1+t)dt?$$

- ☐ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$
- ☐ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} x^k$
- ☐ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k$
- ☐ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$
- ☐ Keine der obigen Antworten ist richtig.

4. Aufgabe:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$.

a) Berechne das Taylopolynom zweiten Grades im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

b) Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $|f(x) - T_2(x)| \leq \frac{1}{3}|x|^3$.

Metrische Räume

1. Aufgabe:

Entscheide, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Beweise oder widerlege!

a) Seien $U_i \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen, $i \in I$ eine beliebige Indexmenge. Dann ist auch $\bigcap_{i\in I} U_i$ offen.

b) Jede ein-elementige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist (folgen-)kompakt.

c) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist f stetig.

d) Seien X, Y metrische Räume, $A \subset X$ offen und $f : X \to Y$ stetig. Dann ist $f(A)$ auch offen.

2. Aufgabe:

Welche der folgenden Mengen sind offen?

- ☐ $M_1 := B((0,0),1)\backslash\{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$
- ☐ $M_2 := \{(p,q) \in \mathbb{R}^2 : p \in \mathbb{Q} \vee q \in \mathbb{Q}\}$
- ☐ $M_3 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 5\}$
- ☐ $M_4 := \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_1 \leq 1\}$
- ☐ $M_5 := \{x \in \mathbb{R} : e^x + sin(x) \in (2,5)\}$

Welche der Mengen sind beschränkt?

3. Aufgabe:

In welchen Punkten des $\mathbb{R}^3$ ist

$$f(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} \frac{|x_1|+|x_2|+|x_3|}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}, & (x_1,x_2,x_3) \neq (0,0,0) \\ 1, & (x_1,x_2,x_3) = (0,0,0) \end{cases}$$

stetig?

Kurven(-integrale)

1. Aufgabe:

Betrachte die Kurve

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t^3) \\ \sin(t^3) \end{pmatrix}$$

a) Skizziere die Kurve!

b) Berechne die Bogenlängenfunktion $s_f : [0, 2\pi] \to [0, L(f)]$ von f.

c) Bestimme eine normierte Parameterdarstellung $g(s) = (f \circ \varphi)(s)$ mit Spur(f)=Spur(g).

2. Aufgabe:

Betrachte die folgenden Kurven γ_i und die Funktionen $h_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(i \in \{1, 2\})$.

a) $\gamma_1 : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2, \gamma_1(t) = (4t, 3t), h(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 x_1$

b) $\gamma_2 : [0, 2] \to \mathbb{R}^2, \gamma_2(t) = (3t^2, 4t^2), h(x_1, x_2) = x_1 - x_2$

Berechne die Kurvenintegrale 1. Art

$$\int_{\gamma_i} h_i \, \mathrm{d}s.$$

3. Aufgabe:

Berechne durch das Kurvenintegral 2. Art

$$\int_{\gamma} F \, \overrightarrow{\mathrm{d}s},$$

wie viel Arbeit geleistet werden muss, um einen Massenpunkt unter der Einwirkung des Kraftfeldes

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 x_2 \\ x_1^2 \end{pmatrix}$$

vom Punkt $(0, 0)$ zum Punkt $(1, 1)$ zu bewegen. Wir gehen entlang der Wege

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, t \in [0, 1], \qquad \text{und} \qquad \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix}, t \in [0, 1],$$

Differentialrechnung

MATHEMATIK VERBINDET

Mathe Nacht

1. Aufgabe:

a) Stimmen die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung $\partial_1\partial_2 f$ und $\partial_2\partial_1 f$ von

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases} x_1x_2\cdot\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1^2+x_2^2}, & (x_1,x_2)\neq(0,0)\\ 0, & (x_1,x_2)=(0,0)\end{cases}$$

im Nullpunkt überein?

b) Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit $f(x_1,x_2)=|x_1|x_2$ gegeben. Welche Aussagen sind wahr?

- ☐ f ist im Punkt $(0,1)$ differenzierbar
- ☐ f ist im Punkt $(0,3)$ stetig
- ☐ Die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(0,1)$ existieren
- ☐ Der Gradient von f in $(1,0)$ existiert

2. Aufgabe:

a) Die Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit $f(x,y)=x^3-3x^2y+3xy^2+y^3-3x-21y$ hat vier extremwertverdächtige Stellen. Welche sind das?

$$(x_1,y_1)=(3,\dots)\qquad (x_2,y_2)=(-3,\dots)\qquad (x_3,y_3)=(1,\dots)\qquad (x_4,y_4)=(-1,\dots)$$

b) Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit $f(x_1,x_2)=ax_1^2+bx_2^2+c, a,b,c\in\mathbb{R}$. Ordne den Parameterkonstellationen

$$(a,b)=(1,1)\quad\text{oder}\quad(a,b)=(-1,-1)\quad\text{oder}\quad(a,b)=(1,-1)$$

jeweils zu, ob $(0,0)$

ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum oder ein Sattelpunkt

von f ist.

3. Aufgabe:

a) Die Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ sei in $x_0\in\mathbb{R}^2$ total differenzierbar. Für welche Vektoren $e\in\mathbb{R}^2$ der Länge 1 ist die Richtungsableitung $\partial_e f$ im Punkt x_0 maximal bzw. minimal?

b) Seien $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit $g(1)=2, h(1,2)=3$. Berechnen Sie $u'(1)$ für $u(x):=f(x,g(x),h(x,x+1))$ in Abhängigkeit von den (partiellen) Ableitungen der gegeben Funktionen.