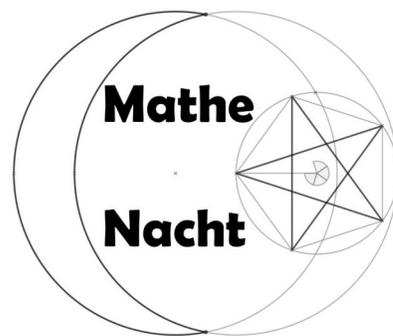
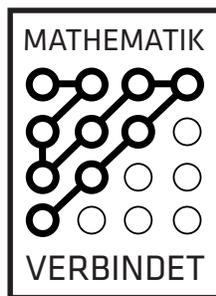


Integralrechnung



1. Aufgabe:

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie

- mit Hilfe der Substitutionsregel
- mit Hilfe partieller Integration

die Identität

$$2 \cdot \int_a^b f(x) \cdot f'(x) dx = f^2(b) - f^2(a), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

2. Aufgabe:

Untersuchen Sie, ob die folgenden Integrale existieren, und berechnen Sie im Falle der Existenz ihren Wert:

- $\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x} dx$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $\int_{-1}^1 \ln|x| dx$
- $\int_0^{1/\pi} -\frac{\sin(1/x)}{x^2} dx$
- $\int_0^1 (\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot x \cdot e^{-nx^2}) dx$

Was passiert, wenn man Integral und Grenzwert bei 2d) vertauscht?

3. Aufgabe:

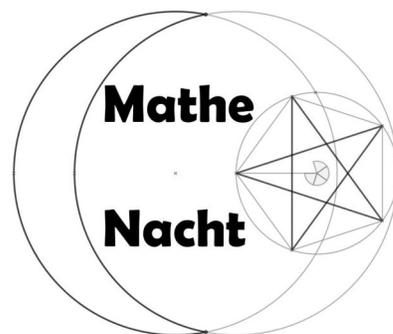
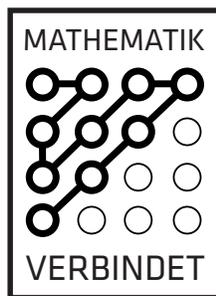
Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wenn man den Hauptsatz der Integralrechnung und dann den Mittelwertsatz der Differentialrechnung auf das Integral

$$\int_a^b f(x) dx$$

anwendet, dann ist es äquivalent zu welchem der folgenden Terme?

- $f(c)$ an einer Zwischenstelle $c \in [a, b]$
- $f'(c)$ an einer Zwischenstelle $c \in [a, b]$
- $(b - a)f(c)$ an einer Zwischenstelle $c \in [a, b]$
- $(b - a)f'(c)$ an einer Zwischenstelle $c \in [a, b]$
- Keine der obigen Antworten ist richtig.

Potenzreihen



1. Aufgabe:

Berechnen Sie den Konvergenzradius R der folgenden Potenzreihen. Untersuchen Sie zusätzlich die Konvergenz in den Randpunkten $x = -R$ und $x = R$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{3^k} x^k \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{3^{k-1}}{2^{k+2}} x^k$$

2. Aufgabe:

Stellen Sie das Integral

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx$$

als unendliche Reihe dar, indem Sie den Integranden als Potenzreihe schreiben und diese gliedweise integrieren. Begründen Sie, warum die gliedweise Integration möglich ist!

3. Aufgabe:

Wie sieht die Taylorreihe von $f'(x)$ in $x_0 = 0$ aus, wenn

$$f(x) = \int_0^x \ln(1+t) dt?$$

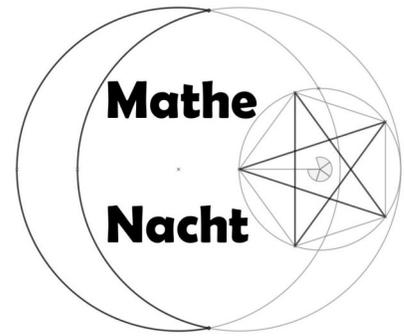
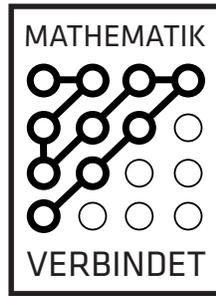
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} x^k$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k$
- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$
- Keine der obigen Antworten ist richtig.

4. Aufgabe:

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$.

- a) Berechne das Taylorpolynom zweiten Grades im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.
- b) Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $|f(x) - T_2(x)| \leq \frac{1}{3}|x|^3$.

Metrische Räume



1. Aufgabe:

Entscheide, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Beweise oder widerlege!

- a) Seien $U_i \subset \mathbb{R}^n$ offene Mengen, $i \in I$ eine beliebige Indexmenge. Dann ist auch $\bigcap_{i \in I} U_i$ offen.
- b) Jede ein-elementige Teilmenge des \mathbb{R}^n ist (folgen-)kompakt.
- c) Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Norm auf \mathbb{R}^n . Dann ist f stetig.
- d) Seien X, Y metrische Räume, $A \subset X$ offen und $f : X \rightarrow Y$ stetig. Dann ist $f(A)$ auch offen.

2. Aufgabe:

Welche der folgenden Mengen sind offen?

- $M_1 := B((0, 0), 1) \setminus \{(0, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$
- $M_2 := \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 : p \in \mathbb{Q} \vee q \in \mathbb{Q}\}$
- $M_3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 5\}$
- $M_4 := \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_1 \leq 1\}$
- $M_5 := \{x \in \mathbb{R} : e^x + \sin(x) \in (2, 5)\}$

Welche der Mengen sind beschränkt?

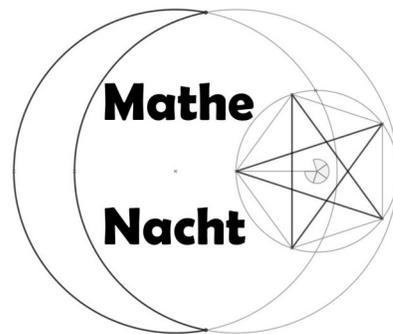
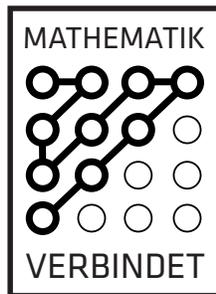
3. Aufgabe:

In welchen Punkten des \mathbb{R}^3 ist

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \frac{|x_1| + |x_2| + |x_3|}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, & (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0) \\ 1, & (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

stetig?

Kurven(-integrale)



1. Aufgabe:

Betrachte die Kurve

$$f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t^3) \\ \sin(t^3) \end{pmatrix}$$

- Skizziere die Kurve!
- Berechne die Bogenlängenfunktion $s_f : [0, 2\pi] \rightarrow [0, L(f)]$ von f .
- Bestimme eine normierte Parameterdarstellung $g(s) = (f \circ \varphi)(s)$ mit $\text{Spur}(f) = \text{Spur}(g)$.

2. Aufgabe:

Betrachte die folgenden Kurven γ_i und die Funktionen $h_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in \{1, 2\}$).

- $\gamma_1 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma_1(t) = (4t, 3t), h(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2x_1$
- $\gamma_2 : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma_2(t) = (3t^2, 4t^2), h(x_1, x_2) = x_1 - x_2$

Berechne die Kurvenintegrale 1. Art

$$\int_{\gamma_i} h_i \, ds.$$

3. Aufgabe:

Berechne durch das Kurvenintegral 2. Art

$$\int_{\gamma} F \, d\vec{s},$$

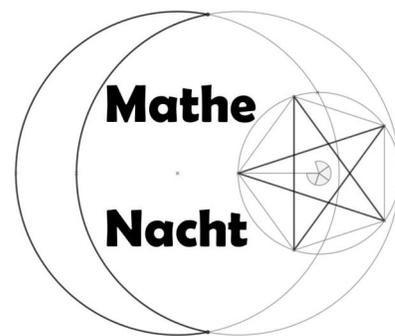
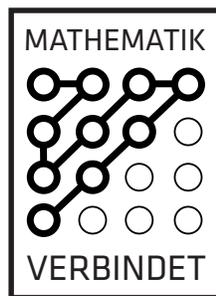
wie viel Arbeit geleistet werden muss, um einen Massenpunkt unter der Einwirkung des Kraftfeldes

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 \\ x_1^2 \end{pmatrix}$$

vom Punkt $(0, 0)$ zum Punkt $(1, 1)$ zu bewegen. Wir gehen entlang der Wege

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, t \in [0, 1], \quad \text{und} \quad \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix}, t \in [0, 1],$$

Differentialrechnung



1. Aufgabe:

- a) Stimmen die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung $\partial_1\partial_2f$ und $\partial_2\partial_1f$ von

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1x_2 \cdot \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, & (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0, & (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

im Nullpunkt überein?

- b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = |x_1|x_2$ gegeben. Welche Aussagen sind wahr?

- f ist im Punkt $(0, 1)$ differenzierbar
- f ist im Punkt $(0, 3)$ stetig
- Die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(0, 1)$ existieren
- Der Gradient von f in $(1, 0)$ existiert

2. Aufgabe:

- a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 3x - 21y$ hat vier extremwertverdächtige Stellen. Welche sind das?

$$(x_1, y_1) = (3, \dots) \quad (x_2, y_2) = (-3, \dots) \quad (x_3, y_3) = (1, \dots) \quad (x_4, y_4) = (-1, \dots)$$

- b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_2^2 + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Ordne den Parameterkonstellationen

$$(a, b) = (1, 1) \quad \text{oder} \quad (a, b) = (-1, -1) \quad \text{oder} \quad (a, b) = (1, -1)$$

jeweils zu, ob $(0, 0)$

ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum oder ein Sattelpunkt

von f ist.

3. Aufgabe:

- a) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei in $x_0 \in \mathbb{R}^2$ total differenzierbar. Für welche Vektoren $e \in \mathbb{R}^2$ der Länge 1 ist die Richtungsableitung $\partial_e f$ im Punkt x_0 maximal bzw. minimal?
- b) Seien $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(1) = 2$, $h(1, 2) = 3$. Berechnen Sie $u'(1)$ für $u(x) := f(x, g(x), h(x, x+1))$ in Abhängigkeit von den (partiellen) Ableitungen der gegebenen Funktionen.